SECONDO TEST (Geometria analitica)

30 gennaio 2013

Esercizio 1. Considerati, in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, i sottospazi:

$$A_k = < \begin{pmatrix} k+2 & 0 \\ k & k-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix} >, \qquad B_k = < \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k-3 \end{pmatrix} >, \qquad k \in \mathbb{R}$$

determinare, al variare di k, una base per il complemento ortogonale di A_k e una base per il complemento ortogonale di B_k, utilizzando il prodotto scalare euclideo standard rispetto alla base canonica di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. $\boxed{6}$

[A_k: $\quad k=-2: \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad k \neq -2: \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{k}{k+2} & k+1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1-k}{k+2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$

B_k: $\quad k=2: \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad k \neq 2: \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$]

Esercizio 2. Nel piano proiettivo complesso, sia $\mathscr{C}$ il fascio di coniche:

$$\mathscr{C} \; : \; x^2 + 2(k-1)xy + ky^2 - (k-1)x = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Determinare:

(a) le coniche degeneri e i punti di base; riconoscere il fascio; $\boxed{7}$
[Coniche degeneri: $x(x-2y+1)=0$, $(x+iy)(x-iy)=0$. Fascio di coniche tangenti in O con punti base: $(0,0)$ con molteplicità 2, $\left(\frac{2i-1}{5}, \frac{2+i}{5}\right)$, $\left(\frac{-2i-1}{5}, \frac{2-i}{5}\right)$]

(b) i valori di k per i quali $\mathscr{C}$ è una iperbole generale; $\boxed{2}$
[$(k < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cup k > \frac{3+\sqrt{5}}{2}) \cap k \neq 0$]

(c) la conica del fascio che ha come centro il punto proprio $C=(1,-1/2)$; $\boxed{3}$
[$x^2+2xy+2y^2-x=0$ (cioè k=2)]

(d) la conica del fascio che ha come asintoto la retta a di equazione: $x+3y-3=0$. $\boxed{3}$
[$x^2+4xy+3y^2-2x=0$ (cioè k=3)]

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ siano:

$$r \; : \; \begin{cases} y-z=3 \\ x=0 \end{cases}, \qquad a \; : \; \begin{cases} 2y+z=0 \\ x=-2 \end{cases}.$$

Determinare:

(a) la posizione della retta a rispetto alla retta r; $\boxed{2}$
[Sghembe]

(b) un'equazione cartesiana della superficie ottenuta attraverso la rotazione della retta r attorno alla retta a. $\boxed{11}$
[$x^2-y^2-7z^2+4x+8yz+18y-36z-45=0$]